Chapitre 17. Espaces vectoriels

Dans ce chapitre, on fixe un corps K, appelé corps des scalaires.

Pseudo-définition : Étant donné n objets $x_1, \dots, x_n$, une combinaison linéaire (CL) de $x_1, \dots, x_n$ est (quand ça a un sens) une expression de la forme $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$, où $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$.

1 Espaces vectoriels

1.1 Définition

Définition 1.1. Un espace vectoriel sur K (ou K-espace vectoriel) est un ensemble E muni de deux opérations :

$$+ : \begin{cases} E \times E \to E \\ (x, y) \mapsto x + y \end{cases} \qquad \cdot : \begin{cases} K \times E \to E \\ (\lambda, x) \mapsto \lambda x \end{cases}$$

telles que :

- $(E, +)$ est un groupe abélien.
- On a $\forall x \in E, 1x = x$
- On a $\forall \lambda, \mu \in K, \forall x \in E, \lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$
- On a $\forall \lambda, \mu \in K, \forall x \in E, (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$
- On a $\forall \lambda \in K, \forall x, y \in E, \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$

1.2 Premiers exemples

1)L'espace vectoriel K^n pour $n \in \mathbb{N}$
2)L'ensemble $M_{np}(K)$
3)L'ensemble K^Ω des fonctions $\Omega \to K$
4)Si E et F sont des K-ev, $E \times F$ est un K-ev
5)L'ensemble $K[X]$ des polynômes et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble $K_n[X]$
6)L'ensemble $\{0_E\}$ est un K-ev que l'on qualifie d'espace vectoriel nul (ou trivial)

1.3 Quelques règles de calcul

Proposition 1.2. Soit E un ev. On a :

- $\forall \lambda \in K, \lambda 0_E = 0_E$
- $\forall x \in E, 0x = 0_E$
- $\forall x \in E, -x = (-1)x$

Proposition 1.3 ("règle de produit scalaire-vecteur nul")**.** Soit E un ev et $\lambda \in K$, $x \in E$ tels que $\lambda x = 0_E$. Alors $\lambda = 0$ ou $x = 0_E$

1.4 Algèbres

Définition 1.4. Une K-algèbre est un ensemble A muni de trois relations :

$$+ : \begin{cases} A \times A \to A \\ (x, y) \mapsto x + y \end{cases} \qquad \cdot : \begin{cases} K \times A \to A \\ (\lambda, x) \mapsto \lambda x \end{cases} \qquad \times : \begin{cases} A \times A \mapsto A \\ (x, y) \to xy \end{cases}$$

telles que :

- $*$ $(A, +, \cdot)$ soit un K-espace vectoriel.
- $*$ $(A, +, \times)$ soit un anneau.
- $*$ La multiplication $\times$ soit bilinéaire, càd $\forall x, y \in A, \forall \lambda \in K, (x \times (\lambda y) = (\lambda x) \times y = \lambda \times (xy))$

Proposition 1.5. Soit L/K une extension de corps (càd L est un corps dont K est un sous-corps).
Alors L est un K-algèbre pour les lois usuelles, càd l'addition et la multiplication de L et la multiplication restreinte

$$\begin{cases} K \times L \to L \\ (\lambda, x) \mapsto \lambda x \end{cases}$$

Par exemple, $\mathbb{C}$ est une $\mathbb{R}$-algèbre (et donc un $\mathbb{R}$-ev)
$\mathbb{R}$ est une $\mathbb{Q}$-algèbre (et donc un $\mathbb{Q}$-ev)

2 Familles de vecteurs

Dans toute cette section, on fixe un K-ev E et une famille $(x_i)_{i \in I}$ d'éléments de E (si $I = [\![1, r]\!]$, on le notera plus simplement $(x_1, \dots, x_r)$).

2.1 Combinaisons linéaires

Définition 2.1. Une combinaison linéaire de vecteurs x_i, $i \in I$ est un élément de la forme $\sum\limits_{i \in I} \lambda_i x_i$, où $(\lambda_i)_{i \in I}$ est une famille presque nulle d'éléments de K, càd que $S = \{i \in I \mid \lambda_i \neq 0\}$ est fini.
La somme $\sum\limits_{i \in I} \lambda_i x_i$ signifie simplement $\sum\limits_{i \in S} \lambda_i x_i$
On note $\mathrm{Vect}(x_i)_{i \in I}$ et on appelle sous-espace vectoriel engendré par les x_i, $i \in I$
l'ensemble de ces combinaisons linéaires.
Si $I = [\![1, r]\!]$ la définition devient :

$$\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_r) = \left\{ \sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i \mid \lambda_1, \dots, \lambda_r \in K \right\}$$

2.2 Familles libres

Définition 2.2.

- $*$ Une relation de liaison entre les x_i, $i \in I$ est une égalité de la forme $\sum\limits_{i \in I} \lambda_i x_i = 0_E$
- $*$ Cette relation de liaison est dite triviale si $\forall i \in I, \lambda_i = 0$ et non triviale sinon.

Définition 2.3.

- $*$ La famille $(x_i)_{i \in I}$ est dite liée s'il existe une relation de liaison non triviale entre les x_i, $i \in I$.
- $*$ Elle est dite libre dans le cas contraire. (On dit aussi que les x_i, $i \in I$ sont linéairement indépendants).

Définition 2.4 (Colinéarité)**.** Soit $u, v \in E$. LASSÉ :

(i) Il existe $\omega \in E$ et $\lambda, \mu \in K$ tels que $\begin{cases} u = \lambda\omega \\ v = \mu\omega \end{cases}$

(ii) $(\exists \alpha \in K : v = \alpha u)$ ou $(\exists \beta \in K : u = \beta v)$

Quand ces assertions sont vraies, on dit que u et v sont colinéaires.

Proposition 2.5 (Liberté de petites familles)**.**

0. La famille $()$ est libre.
1. Soit $v \in E$. La famille (v) est libre ssi $v \neq 0_E$
2. Soit $u, v \in E$. La famille (u, v) est libre ssi u et v ne sont pas colinéaires.

Proposition 2.6. La famille $(x_i)_{i \in I}$ est liée si et seulement si l'un des vecteurs est CL des autres.

2.3 Familles génératrices

Définition 2.7. On dit que $(x_i)_{i \in I}$ engendre E (ou est génératrice de E) si $\text{Vect}(x_i)_{i \in I} = E$, càd si tout vecteur de E est CL de vecteurs x_i, $i \in I$

2.4 Bases

Définition 2.8. On dit que $(x_i)_{i \in I}$ est une base de E si $(x_i)_{i \in I}$ est libre et qu'elle engendre E.

2.5 Décomposition selon une base

Proposition 2.9. On a les équivalences suivantes :

* La famille $(x_i)_{i \in I}$ engendre E ssi tout vecteur $v \in E$ possède une écriture $v = \sum\limits_{i \in I} \lambda_i x_i$, pour une certaine $\lambda \in K^{(I)}$
* La famille $(x_i)_{i \in I}$ est libre ssi tout vecteur $v \in E$ possède au plus une écriture.
* La famille $(x_i)_{i \in I}$ est une base de E ssi tout vecteur $v \in E$ possède exactement une écriture.

Définition 2.10. On suppose que E a une base finie $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_r)$. Soit $v \in E$.

L'unique n-uplet $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in K^n$ tel que $v = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$ est noté $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(v)$

On dit que $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les coordonnées du vecteur v dans la base $\mathcal{B}$.

3 Sous-espaces vectoriels

3.1 Définitions

Philosophiquement, un sous-espace vectoriel (sev) de E est une partie de E stable par combinaison linéaire, càd que dès qu'elle contient une famille de vecteurs $(x_i)_{i \in I}$ elle contient toutes les CL des x_i, $i \in I$.
En particulier, elle doit toujours contenir 0_E, qui est une CL de 0 vecteurs.

Dans toute cette section, E désigne un K-ev.

Définition 3.1. Un sous-espace vectoriel de E est une partie $I \subseteq E$ telle que :

* $0_E \in F$
* $\forall x \in F, \forall \lambda \in K, \lambda x \in F$
* $\forall x, y \in F, x + y \in F$

Théorème 3.2 (Stabilité par CL)**.** Soit F un sev de E.
Alors F est stable par CL : pour toute famille $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de F, on a $\text{Vect}(x_i)_{i\in I} \subseteq F$

Proposition 3.3. Soit $F \subseteq E$ une partie non vide telle que $\forall \lambda \in K, \forall x, y \in F, x + \lambda y \in F$
Alors F est un sev de E.

Proposition 3.4. Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E.
Alors $\text{Vect}(x_i)_{i\in I}$ est un sous-espace vectoriel de E.

Proposition 3.5. Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille de sev E.
Alors $\bigcap\limits_{i\in I} F_i$ est un sev de E.

3.2 Exemples

Proposition 3.6. Soit $A \in M_{np}(K)$

* $\ker A = \{X \in K^p \mid AX = 0_{K^n}\}$ est un sev de K^p
* $\text{im}\, A = \{AX \mid X \in K^p\}$ est un sev de K^n

Proposition 3.7. Soit $A \in M_{np}(K)$
Alors $\text{im}\, A = \text{Vect}(C_1(A), \dots, C_p(A))$

3.3 Bases d'un sous-espace vectoriel

Si F est un sev de E, F hérite d'une structure de ev. On peut dont s'intéresser à une famille $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de F et se demander si elle est libre / génératrice de F / une base de F.
En pratique, il y a deux méthodes pour vérifier que $(x_i)_{i\in I}$ est une base de F

Méthode 1 : retour aux définitions.

0. On vérifie que $\forall i \in I, x_i \in F$ (ce qui montre $\text{Vect}(x_i)_{i\in I} \subseteq F$ par stabilité par CL).
1. On vérifie que $(x_i)_{i\in I}$ est libre.
2. On vérifie que tout $y \in F$ est CL des x_i, $i \in I$, ce qui montre $F \subseteq \text{Vect}(x_i)_{i\in I}$

Méthode 2 : par analyse-synthèse.

0. idem.
1. On vérifie que tout $y \in F$ s'écrit de manière unique comme CL des x_i, $i \in I$

4 Familles et bases échelonnées

Définition 4.1. Une famille $(P_i)_{i\in I}$ de polynômes non nuls est dite échelonnée si tous les degrés $\deg P_i$, $i \in I$ sont différents.

Proposition 4.2. Toute famille échelonnée de polynômes est libre.

Théorème 4.3.

* Soit $(P_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une famille de polynômes tels que $\forall i \in \mathbb{N}$, $\deg P_i = i$. Alors $(P_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une base de $K[X]$
* Soit $(P_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ une famille de polynômes tels que $\forall i \in [\![0, n]\!]$, $\deg P_i = i$. Alors $(P_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$ est une base de $K[X]$

5 Somme de sous-espaces vectoriels

Dans toute cette section, on fixe un espace vectoriel E.

5.1 Définition

Définition 5.1.

- Soit F_1, F_2 deux sev de E.
  On définit leur somme $F_1 + F_2 = \{x_1 + x_2 \mid x_1 \in F_1,\, x_2 \in F_2\}$
- Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille de sev de E.
  On définit leur somme $\sum\limits_{i\in I} F_i$ comme l'ensemble des sommes $\sum\limits_{i\in I} x_i$ où $(x_i)_{i\in I}$ est une famille presque nulle d'éléments de E telle que $\forall i \in I,\, x_i \in F_i$

Proposition 5.2.

- La somme d'une famille de sev de E est un sev de E.
- C'est même le plus petit sev de E dans lequel sont inclus tous les éléments de la famille.

5.2 Somme directe

Définition 5.3.

- Soit F_1, F_2 deux sev de E.
  On dit que F_1 et F_2 sont en somme directe si tout élément de $F_1 + F_2$ s'écrit de manière unique sous la forme $x_1 + x_2$, où $x_1 \in F_1$ et $x_2 \in F_2$.
  Si c'est le cas, on note $F_1 \oplus F_2 = F_1 + F_2$
- Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille de sev. On dit que les F_i, $i \in I$ sont en somme directe si tout élément de $\sum\limits_{i\in I} F_i$ s'écrit de manière unique sous la forme $\sum\limits_{i\in I} x_i$, où $(x_i)_{i\in I}$ est une famille presque nulles d'éléments de E telle que $\forall i \in I,\, x_i \in F_i$.
  Si c'est le cas, on note $\bigoplus\limits_{i\in I} F_i = \sum\limits_{i\in I} F_i$

Proposition 5.4. Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille de sev de E.
Alors les F_i, $i \in I$ sont en somme directe si et seulement si la seule décomposition de 0_E sous la forme $\sum\limits_{i\in I} x_i$ est la décomposition $0_E = \sum\limits_{i\in I} 0_E$

Proposition 5.5. Soit F_1, F_2 deux sous-espaces vectoriels de E.
Alors F_1 et F_2 sont en somme directe ssi $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$

5.3 Sous-espaces vectoriels supplémentaires

Définition 5.6. Soit F_1 et F_2 deux sev de E.
On dit qu'ils sont supplémentaires si $F_1 \oplus F_2 = E$

5.4 Bases adaptées à une décomposition en somme directe

Théorème 5.7.

- Soit F_1 et F_2 deux sev de E en somme directe. Supposons que $(x_1, \dots, x_n)$ soit une base de F_1 et $(y_1, \dots, y_p)$ soit une base de F_2
  Alors la concaténation $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_p)$ est une base de $F_1 \oplus F_2$
- Plus généralement, si $(F_i)_{i\in I}$ est une famille de sev de E en somme directe et que, pour tout $i \in I$, $(x_{i,j})_{j\in J_i}$ est une base de F_i, alors la "concaténation" $(x_{i,j})_{\substack{i\in I\\ j\in J_i}}$ est une base de $\bigoplus\limits_{i\in I} F_i$

Théorème 5.8.

- $*$ Soit $(x_1, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_n)$ une base de E.
  Alors $\text{Vect}(x_1, \dots, x_r) \oplus \text{Vect}(x_{r+1}, \dots, x_n) = E$
- $*$ Soit $(x_i)_{i\in I}$ une base de E et $(I_j)_{j\in J}$ une famille de parties de I formant un recouvrement disjoint de I (càd $I = \bigsqcup\limits_{j\in J} I_j$). Alors $E = \bigoplus\limits_{j\in J} \text{Vect}(x_i)_{i\in I_j}$

6 Applications linéaires

Soit E et F deux espaces vectoriels.

6.1 Définition

Définition 6.1. Une application K-linéaire $f : E \to F$ est une application telle que :

- $*$ $\forall x, y \in E, f(x+y) = f(x) + f(y)$
- $*$ $\forall x \in E, \lambda \in K, f(\lambda x) = \lambda f(x)$

On note $\mathcal{L}(E,F)$ ou $\mathcal{L}_K(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires $E \to F$

Proposition 6.2. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors f "préserve les CL", càd :

- $*$ $f(0_E) = 0_F$
- $*$ $\forall x_1, \dots, x_n \in E, \forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K, f(\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$

Proposition 6.3. Soit $f : E \to F$ une application telle que $\forall x, y \in E, \forall \lambda \in K, f(x + \lambda y) = f(x) + \lambda f(y)$
Alors $f \in \mathcal{L}(E,F)$

Proposition 6.4. $\mathcal{L}(E,F)$ est un sev de F^E
(Autrement dit : une CL d'applications linéaires est linéaire).

Proposition 6.5 (Stabilité par composition)**.** Soit E, F, G trois espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$
Alors $g \circ f \in \mathcal{L}(E,G)$

Proposition 6.6 (Bilinéarité de la composition)**.** La composition des applications linéaires est bilinéaire.
Soit E, F, G trois espaces vectoriels. Soit $\lambda \in K$.

- $*$ Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g_1, g_2 \in \mathcal{L}(F,G)$.
  On a $(g_1 + g_2) \circ f = g_1 \circ f + g_2 \circ f$ et $(\lambda g_1) \circ f = \lambda(g_1 \circ f)$
- $*$ Soit $f_1, f_2 \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$.
  On a $g \circ (f_1 + f_2) = g \circ f_1 + g \circ f_2$ et $g \circ (\lambda f_1) = \lambda(g \circ f_1)$

Définition 6.7. Un endomorphisme de E est une application linéaire $E \to E$
On note $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E,E)$

Corollaire 6.8. $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ est un anneau, et même une K-algèbre.

6.2 Exemples

Cas particulier crucial : Si $A \in M_{np}(K)$, on a une AL

$$\varphi_A : \begin{cases} K^p \to K^n \\ X \mapsto AX \end{cases}$$

C'est l'application linéaire canoniquement associée à A.

6.3 Noyaux et images

Définition 6.9. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
On définit :

* $*$ Son noyau $\ker f = \{x \in E \mid f(x) = 0_E\}$
* $*$ son image $\operatorname{im} f = \{f(x) \mid x \in E\}$

Proposition 6.10. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

* $*$ $\ker f$ est un sev de E.
* $*$ $\operatorname{im} f$ est un sev de F.

Proposition 6.11. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$

* $*$ Si H est un sev de F, alors $f^{-1}[H]$ est un sev de E.
* $*$ Si G est un sev de E, alors $f[G]$ est un sev de F.

Théorème 6.12. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$

* $*$ Deux vecteurs $x_1, x_2 \in E$ ont la même image par f ssi $x_2 - x_1 \in \ker f$
* $*$ On a f injective $\iff \ker f = \{0_E\}$
* $*$ On a f surjective $\iff \operatorname{im} f = F$

6.4 Sous-espaces affines d'un espace vectoriel

Définition 6.13. Un Sous-espace affine de E est un ensemble de la forme $a + G = \{a + x \mid x \in G\}$ où $a \in E$ et G est un sev de E.
On dit que l'espace vectoriel G est la direction du sous-espace affine.

Notation : La direction G d'un sous-espace affine $A \subseteq E$ est parfois noté $\vec{A}$.

Proposition 6.14. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $y \in F$.
Alors $f^{-1}[\{y\}] = \{x \in E \mid f(x) = y\}$ est soit vide, soit un sous-espace affine de direction $\ker f$.

Proposition 6.15. Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de sous-espaces affines de E.
Alors $\bigcap\limits_{i \in I} A_i$ est soit vide, soit un sous-espace affine, de direction $\bigcap\limits_{i \in I} \vec{A}_i$

6.5 Isomorphismes

Définition 6.16. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
On dit que f est un isomorphisme si f est bijective.
On dit que E et F sont isomorphes s'il existe un isomorphisme $E \to F$.

Proposition 6.17. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ un isomorphisme.
Alors $f^{-1} : F \to E$ est linéaire (et donc un isomorphisme).

Proposition 6.18. Soit E, F, G trois sev et $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux isomorphismes.
Alors $g \circ f$ est un isomorphisme et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

7 Endomorphismes

On fixe un K-ev. E

Rappel : $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ est un anneau (et même une K-algèbre).

Définition 7.1. Un automorphisme de E est un endomorphisme bijectif de E.
On note $GL(E)$, et on appelle groupe linéaire de E, l'ensemble des automorphismes de E.

Définition 7.2. Deux endomorphismes $f, g \in \mathcal{L}(E)$ commutent si $g \circ f = f \circ g$.

Proposition 7.3. Soit $f, g \in \mathcal{L}(E)$ commutant.
Alors $\ker f$ et $\operatorname{im} f$ sont stables par g.

Définition 7.4. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.
On définit son commutant $C(f) = \{g \in \mathcal{L}(E) \mid g \circ f = f \circ g\}$

8 Applications linéaires et familles

Soit E, F deux ev et $f \in \mathcal{L}(E, F)$

8.1 Prolongement des identités

Théorème 8.1.

* Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E et $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$ telles que $\forall i \in I, f(x_i) = g(x_i)$
  Alors f et g coïncident sur $\mathrm{Vect}(x_i)_{i \in I}$: $\forall v \in \mathrm{Vect}(x_i)_{i \in I}, f(v) = g(v)$
* Si en outre $(x_i)_{i \in I}$ engendre E, alors $f = g$

8.2 Caractérisation de l'injectivité, la surjectivité

Notation non standard : Si $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in I}$ est une base de E, on notera :
$f_*(\mathcal{B}) = (f(e_i))_{i \in I}$ qui est une famille de vecteurs de F.

Proposition 8.2. Soit $\mathcal{B}$ une base de E.
Alors :

* f est injective ssi $f_*(\mathcal{B})$ est libre.
* f est surjective ssi $f_*(\mathcal{B})$ engendre F.
* f est un isomorphisme ssi $f_*(\mathcal{B})$ est une base de F.

8.3 Propriété universelle des bases

Théorème 8.3. Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in I}$ une base de E et $\mathcal{F} = (y_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de F.
Alors il existe une unique AL $f \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $f_*(\mathcal{B}) = \mathcal{F}$. ($\forall i \in I$, $f(e_i) = y_i$)

9 Applications linéaires et décomposition en somme directe

9.1 Propriété universelle de la somme directe

Théorème 9.1. Soit E, F deux espaces vectoriels et $(S_i)_{i \in I}$ une famille de sev de E telle que $E = \bigoplus\limits_{i \in I} S_i$. On se donne, pour tout $i \in I$, une AL $f_i \in \mathcal{L}(S_i, F)$
Alors il existe une unique AL $f \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $\forall i \in I$, $f_{|S_i} = f_i$

9.2 Projecteurs et symétries

On fixe un espace vectoriel E

Définition 9.2. Soit F, G deux sev de E tels que $E = F \oplus G$

- $*$ Le projecteur sur F parallèlement à G est l'unique endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que
  $\forall x \in F, f(x) = x$ et $\forall x \in G, f(x) = 0_E$
- $*$ (On suppose que K n'est pas de caractéristique 2)
  La symétrie d'axe F parallèlement à G est l'unique endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que
  $\forall x \in F, f(x) = x$ et $\forall x \in G, f(x) = -x$

Définition 9.3. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in K$.
On définit l'espace propre de f associé à λ : $E_\lambda(f) = \ker(f - \lambda id_E) = \{x \in E \mid f(x) = \lambda x\}$
On dit que λ est valeur propre de f si $E_\lambda(f) \neq \{0_E\}$ et on appelle vecteur propre associé à la valeur propre λ tout élément non nul de $E_\lambda(f)$ (Autrement dit, tout vecteur x non nul tel que $f(x) = \lambda x$)
On appelle spectre de f l'ensemble $S_p(f) = S_{p_K}(f)$ de valeurs propres de F.

Proposition 9.4. Soit F, G deux sev de E tels que $E = F \oplus G$

- $*$ On note p le projecteur sur F parallèlement à G.
  On a alors $F = \operatorname{im}(p) = E_1(p)$, $G = \ker(p) = E_0(p)$ et $\forall \lambda \in K \setminus \{0, 1\}$, $E_\lambda(p) = \{0_E\}$
  (Autrement dit, $S_p(p) \subseteq \{0, 1\}$)
- $*$ (On suppose $\operatorname{car}(K) \neq 2$)
  On note s la symétrie d'axe F parallèlement à G.
  On a alors $F = E_1(s)$ et $G = E_{-1}(s)$ et $\forall \lambda \in K \setminus \{-1, 1\}$, $E_\lambda(s) = \{0_E\}$
  (Autrement dit, $S_p(s) \subseteq \{-1, 1\}$)

Théorème 9.5. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$

- $*$ f est un projecteur ssi $f^2 = f$
- $*$ (On suppose $\operatorname{car}(K) \neq 2$)
  f est une symétrie ssi $f^2 = id_E$